Bernhard Strigel Gymnasium
Memmingen

Kollegstufe 2009/11
Leistungskurs Mathematik M2
Klemens Schölhorn

Facharbeit

Das Rechnen mit Matrizen und Anwendungen in der Abbildungsgeometrie

(Mathematische Grundlagen der 3D-Computergrafik)

abgegeben am 23.12.2010

Schriftliche Prüfung	Note:	__________	Punkte:	__________
Mündliche Prüfung	Note:	__________	Punkte:	__________

Datum

Unterschrift des Kursleiters

Eingetragen in das Kursblatt: ____________________

Inhaltsverzeichnis

Einleitung

Die dreidimensionale Computergrafik ist aus unserem heutigen Leben nicht mehr wegzudenken. Jeder Heimcomputer ist heutzutage in der Lage, zumindest einfache virtuelle Welten zu erzeugen und darzustellen. Inzwischen werden sogar komplette Spielfilme, wie z. B. *Avatar - Aufbruch nach Pandora*, so perfekt animiert, dass sie von der Realität nur noch schwer zu unterscheiden sind. Auch in der Medizin wird die dreidimensionale Grafik z. B. zur Darstellung von inneren Organen bei der Computertomografie verwendet.

All diesen Anwendungen liegen die gleichen theoretischen Grundüberlegungen und Probleme zugrunde. Eines davon ist die Positionierung und Verschiebung virtueller Objekte im virtuellen Raum. Grundsätzlich werden alle Objekte zuerst einmal im Ursprung erstellt und müssen anschließend in der passenden Größe und Ausrichtung an die richtige Stelle verschoben werden. Zusätzlich müssen, um Bewegung zu simulieren, manche Objekte im Laufe der Zeit verschoben bzw. verändert werden.

Für dieses Problem bietet die Matrizenrechnung eine adäquate Grundlage. Sie ermöglicht es, sämtliche sog. Transformationen von Objekten einheitlich darzustellen und einfach durchzuführen, ist dabei jedoch weiterhin sehr flexibel.

In dieser Facharbeit werden zuerst die Grundlagen der praktischen Matrizenrechnung erläutert, bevor anschließend auf deren Einsatz bei der dreidimensionalen Computergrafik eingegangen wird.

Dabei kommt ein euklidisches Koordinatensystem mit den Achsenbeschriftungen x, y und z zum Einsatz, wobei die z-Achse „aus dem Bildschirm heraus“ zeigt.

Zusätzlich liegt dieser Facharbeit das vom Autor entwickelte Computerprogramm *MatrixView* bei, mit dem die in der Facharbeit theoretisch abgehandelten Grundlagen praktisch angewendet werden können.

1 Grundlagen der Matrizenrechnung

1.1 Definition und Notation

Eine Matrix ist ein rechteckiges Zahlenfeld mit einer bestimmten Anzahl Spalten und Zeilen. Eine Matrix mit m Zeilen und n Spalten ist vom Typ $m \times n$. Matrizen werden als eine von (runden) Klammern umschlossene Tabelle geschrieben, wobei die Form der Klammern nicht explizit festgelegt ist:

$$A = \begin{pmatrix} a_{1,1} & \cdots & a_{1,n} \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{m,1} & \cdots & a_{m,n} \end{pmatrix} = (a_{i,k}) = A_m^n \tag{1}$$

Der Bezeichner der Matrix wird mit einem Großbuchstaben und die einzelnen Elemente mit dem entsprechenden Kleinbuchstaben mit zwei laufenden Indizes notiert, wobei der erste Index die Zeile und der zweite die Spalte der Matrix bezeichnet. Zusätzlich kann die Anzahl Zeilen als Index und die Anzahl Spalten als Exponent direkt an den Bezeichner der Matrix angefügt werden.[1]

Die einzelnen Elemente einer Matrix entstammen einer bestimmten Menge M, wie z. B. $\mathbb{R}$ oder $\mathbb{C}$. Die Matrix selbst wird in diesem Fall als reelle bzw. komplexe Matrix bezeichnet.

Jede Spalte und Zeile in einer Matrix kann als Vektor angesehen werden. Diese werden dann als Spalten- bzw. Zeilenvektoren bezeichnet, wobei der m-te Zeilenvektor als A_m und der n-te Spaltenvektor als A^n bezeichnet wird.

$$A = \begin{pmatrix} 5 & 2 & 8 \\ 3 & 6 & 2 \end{pmatrix} \qquad \underbrace{A_1 = \begin{pmatrix} 5 & 2 & 8 \end{pmatrix}, \quad A_2 = \begin{pmatrix} 3 & 6 & 2 \end{pmatrix}}_{\text{Zeilenvektoren}}$$
$$\underbrace{A^1 = \begin{pmatrix} 5 \\ 3 \end{pmatrix}, \quad A^2 = \begin{pmatrix} 2 \\ 6 \end{pmatrix}, \quad A^3 = \begin{pmatrix} 8 \\ 2 \end{pmatrix}}_{\text{Spaltenvektoren}} \tag{2}$$

Hierbei wird deutlich, dass jeder beliebige Vektor auch als Matrix bezeichnet werden kann. So entspricht z. B. ein Vektor aus dem $\mathbb{R}^3$ einer 3×1 Matrix.

[1] Heinz Eltermann: Grundlagen der praktischen Matrizenrechnung, Mannheim 1969, S. 9

1.2 Rechenoperationen

1.2.1 Transponieren

Beim Transponieren einer Matrix werden ihre Spalten und Zeilen vertauscht. Dabei wird aus einer Matrix A mit dem Typ $m \times n$ eine Matrix A^T vom Typ $n \times m$.

$$A = \begin{pmatrix} 5 & 2 & 8 \\ 3 & 6 & 2 \end{pmatrix} \qquad B = A^T = \begin{pmatrix} 5 & 2 & 8 \\ 3 & 6 & 2 \end{pmatrix}^T = \begin{pmatrix} 5 & 3 \\ 2 & 6 \\ 8 & 2 \end{pmatrix} \tag{3}$$

Dies entspricht einer Spiegelung an der sog. Hauptdiagonalen der Matrix: $a_{1,1}, a_{2,2}, \ \ldots \ , a_{x,x}$ mit $x = min(m,n)$ [2]

1.2.2 Addition

Es können nur Matrizen gleichen Typs addiert werden. Dabei werden jeweils die Elemente mit gleichen Indizes addiert. Die Subtraktion erfolgt analog.

$$\begin{pmatrix} 5 & 3 & 8 \\ 2 & 8 & 1 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 4 & 2 & 5 \\ 6 & 1 & 3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 5+4 & 3+2 & 8+5 \\ 2+6 & 8+1 & 1+3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 9 & 5 & 13 \\ 8 & 9 & 4 \end{pmatrix} \tag{4}$$

1.2.3 Skalarmultiplikation

Bei der Multiplikation einer Matrix mit einem Skalar wird jedes Element der Matrix einzeln mit dem Skalar multipliziert:

$$\begin{pmatrix} 1 & -4 & 7 \\ 5 & 2 & -5 \end{pmatrix} \cdot (-2) = \begin{pmatrix} -2 & 8 & -14 \\ -10 & -4 & 10 \end{pmatrix} \tag{5}$$

1.2.4 Multiplikation

Die Multiplikation zweier Matrizen A und B ist nur dann definiert, wenn die Anzahl Spalten von A gleich der Anzahl Zeilen von B ist, d. h. wenn die Matrix A vom Typ $m \times l$ und die Matrix B vom Typ $l \times n$ ist. Bei der Multiplikation entsteht dann eine neue Matrix vom Typ $m \times n$.

Jedes Element $c_{i,k}$ der neuen Matrix C_m^n wird über das Skalarprodukt des Zeilenvektors A_i und des Spaltenvektors B^k berechnet:

$$c_{i,k} = A_i \circ B^k = \sum_{s=1}^{l} a_{i,s} \cdot b_{s,k} \tag{6}$$

[2]vgl. de.wikipedia.org: Matrix (Mathematik) 03.11.2010

Für die übersichtliche handschriftliche Berechnung des Matrizenprodukts bietet sich das Falksche Schema an.

Dabei wird die erste Matrix links und die zweite Matrix oberhalb der (noch leeren) Ergebnismatrix notiert. An den Stellen, an denen sich die Spalten- und Zeilenvektoren der beiden Matrizen kreuzen, wird das jeweilige Skalarprodukt eingetragen:

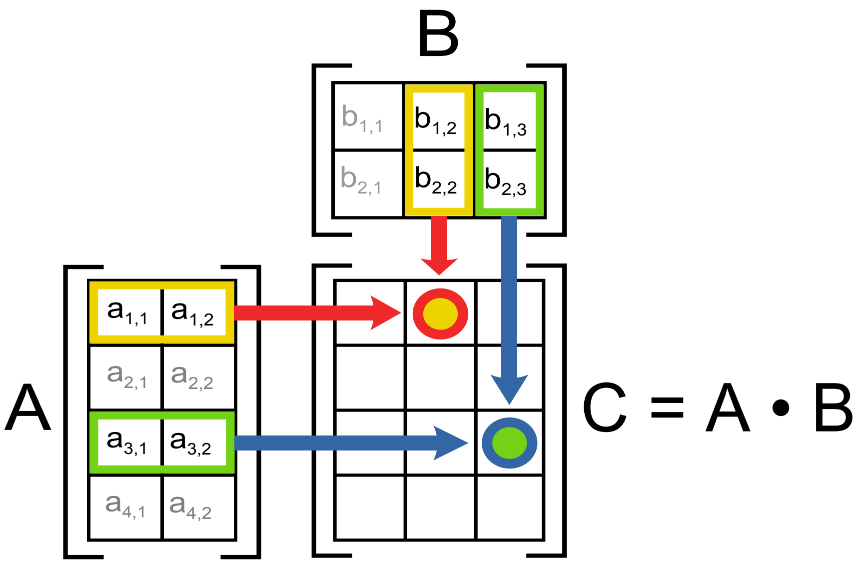


Abbildung 1.1: Matrizen-Multiplikation mit dem Falkschen Schema

1.2.5 Rechengesetze

Für die Addition von Matrizen und die Multiplikation mit einem Skalar gelten im Allgemeinen Assoziativ-, Distributiv- und Kommutativgesetz.

Die Matrizenmultiplikation ist ebenfalls im Allgemeinen assoziativ und distributiv, jedoch nicht kommutativ, da die Multiplikation nur dann definiert ist, wenn die Anzahl Spalten der ersten Matrix gleich der Anzahl Zeilen der zweiten Matrix ist, was im Allgemeinen nicht zutrifft.

1.3 Spezielle Matrizen

1.3.1 Quadratmatrix

Eine Quadratmatrix ist eine Matrix vom Typ $m \times m$, d. h. sie hat genauso viele Zeilen wie Spalten. Quadratische Matrizen werden häufig dann verwendet, wenn sie ohne Typprüfung miteinander multipliziert werden sollen, weil die Multiplikation von beliebigen Quadratmatrizen gleichen Typs immer definiert ist.

1.3.2 Identitätsmatrix

Die Identitäts- oder Einheitsmatrix E ist eine quadratische Matrix, deren Hauptdiagonalenelemente den Wert 1 haben und deren restliche Elemente 0 sind.

$$E = \begin{pmatrix} 1 & 0 & \cdots & 0 & 0 \\ 0 & 1 & & 0 & 0 \\ \vdots & & \ddots & & \vdots \\ 0 & 0 & & 1 & 0 \\ 0 & 0 & \cdots & 0 & 1 \end{pmatrix} \tag{7}$$

Diese kann beliebig mit anderen Matrizen multipliziert werden (solange die Multiplikation definiert ist), wobei immer die ursprüngliche Matrix das Ergebnis ist:

$$E \cdot A = A = A \cdot E \tag{8}$$

Dieses Beispiel ist nur dann definiert, wenn A eine Quadratmatrix vom gleichen Typ wie E ist.

Im Übrigen lässt sich auch ein Vektor mit seiner entsprechenden Einheitsmatrix multiplizieren ohne dass sich dieser verändert.

$$\vec{v} = E \cdot \vec{v} \tag{9}$$

Dieses Beispiel ist nur dann definiert, wenn E so viele Spalten und Zeilen wie $\vec{v}$ Zeilen hat.

1.3.3 Inverse

Das Produkt einer Matrix mit ihrer Inversen[3] ist immer die Einheitsmatrix:

$$A \cdot A^{-1} = E \tag{10}$$

Es existiert nicht zu jeder Matrix eine inverse Matrix. Voraussetzung ist, dass die Zeilenvektoren linear unabhängig sind bzw. die Determinante der Matrix ungleich Null ist.

Die Inverse lässt sich z. B. über den Gauß-Jordan-Algorithmus oder über die Adjunkte in Kombination mit der Determinanten berechnen.[4]

---

[3] auch: reguläre Matrix

[4] siehe auch: http://de.wikipedia.org/wiki/Reguläre_Matrix#Berechnung_der_Inversen_einer_Matrix

2 Anwendungen in der Abbildungsgeometrie

In der Abbildungsgeometrie werden Vektoren bzw. Ortsvektoren, also Punkte, durch verschiedene Transformationen auf ihre entsprechenden Bilder abgebildet. Zu den am häufigsten verwendeten Transformationen gehören die Translation oder Verschiebung, die Rotation und die Skalierung.

2.1 Homogene Koordinaten

Rotation und Skalierung sind lineare Transformationen, d. h. sie können durch eine Multiplikation mit einer Matrix ausgedrückt werden. Dies ist bei der Translation grundsätzlich erst einmal nicht möglich, sie kann nur durch die Addition eines Verschiebungsvektors ausgeführt werden.

Da sich unter diesen Voraussetzungen mehrere Transformationen (vgl. „Kombination mehrerer Transformationen“ auf Seite 11) schlecht kombinieren lassen, erweitert man die Dimension auf $n+1$, was es ermöglicht, auch die Translation als Matrixmultiplikation auszudrücken (vgl. „Translation“ auf Seite 9):

$$\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} \longmapsto \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \\ 1 \end{pmatrix} \tag{1}$$

Hierbei wird auch die zum Vektor gehörende Einheitsmatrix um eine Dimension auf E_4^4 erweitert.

2.2 Lineare Transformationen

2.2.1 Translation

Eine Translation oder Verschiebung ist im Allgemeinen die Addition eines Ortsvektors $\vec{v}$ mit einem Verschiebungsvektor $\vec{t}$:

$$\vec{v'} = \vec{v} + \vec{t}$$

Da sich die Translation in dieser Form aber nicht mit anderen Transformationen kombinieren lässt, kann man diese in homogenen Koordinaten auch als Matrixmultiplikation ausdrücken:

$$\vec{v'} = \vec{v} + \vec{t} = \begin{pmatrix} x_v + x_t \\ y_v + y_t \\ z_v + z_t \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & x_t \\ 0 & 1 & 0 & y_t \\ 0 & 0 & 1 & z_t \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} x_v \\ y_v \\ z_v \\ 1 \end{pmatrix}$$

Die allgemeine Translationsmatrix für eine Verschiebung um den Vektor $\vec{t}$ lautet also:

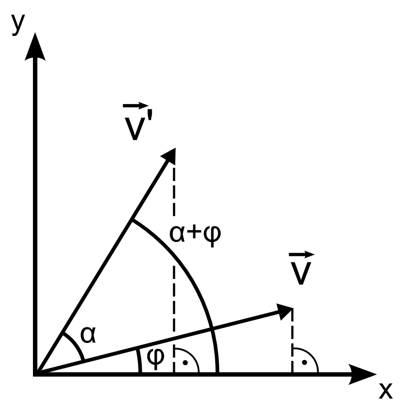
$$T_T = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & x_t \\ 0 & 1 & 0 & y_t \\ 0 & 0 & 1 & z_t \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \tag{2}$$

2.2.2 Rotation

Rotationen im dreidimensionalen Raum werden im Allgemeinen durch drei einzelne Rotationen um die Koordinatenachsen ausgedrückt.

Dabei wird jeder Punkt eines Objekts einzeln um einen ganz bestimmten Winkel um die jeweilige Achse gedreht. Hierbei bleibt die Koordinate der Drehachse konstant. Wird die gleiche Rotation auf jeden Punkt eines aus vielen Punkten bestehenden Objekts angewendet, so wird das gesamte Objekt um den entsprechenden Winkel rotiert.

Abbildung 2.1:



Die Herleitung der Rotation soll am Beispiel der Abbildung des Ortsvektors $\vec{v}$ auf $\vec{v'}$ durch eine Rotation um die z-Achse um α Grad erfolgen. Zur Vereinfachung wurden die (konstanten) z-Koordinaten weggelasen:

$$\vec{v} = \begin{pmatrix} x_v \\ y_v \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \cos\varphi \cdot |\vec{v}| \\ \sin\varphi \cdot |\vec{v}| \end{pmatrix}$$

$$\vec{v'} = \begin{pmatrix} x_{v'} \\ y_{v'} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \cos(\alpha + \varphi) \cdot |\vec{v'}| \\ \sin(\alpha + \varphi) \cdot |\vec{v'}| \end{pmatrix}$$

Aus den Koordinaten des abgebildeten Vektors folgt mit Hilfe der Additionstheoreme für trigonometrische Funktionen[1] und der Bedingung $|\vec{v}| = |\vec{v'}|$:

[1]siehe Formelsammlung

$$\vec{v'} = \begin{pmatrix} \overbrace{\cos\varphi \cdot |\vec{v'}|}^{x_v} \cdot \cos\alpha - \overbrace{\sin\varphi \cdot |\vec{v'}|}^{y_v} \cdot \sin\alpha \\ \underbrace{\cos\varphi \cdot |\vec{v'}|}_{x_v} \cdot \sin\alpha + \underbrace{\sin\varphi \cdot |\vec{v'}|}_{y_v} \cdot \cos\alpha \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} x_v \cdot \cos\alpha - y_v \cdot \sin\alpha \\ x_v \cdot \sin\alpha + y_v \cdot \cos\alpha \end{pmatrix}$$

$$= \begin{pmatrix} \cos\alpha & -\sin\alpha \\ \sin\alpha & \cos\alpha \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} x_v \\ y_v \end{pmatrix}$$

$$\vec{v'} = \begin{pmatrix} \cos\alpha & -\sin\alpha \\ \sin\alpha & \cos\alpha \end{pmatrix} \cdot \vec{v}$$

Hieraus ergibt sich unter Berücksichtigung der Konstantheit der z-Koordinate folgende allgemeine Transformationsmatrix für die Rotation im $\mathbb{R}^3$ um die z-Achse um α Grad in homogenen Koordinaten:

$$T_{R_Z} = \begin{pmatrix} \cos\alpha & -\sin\alpha & 0 & 0 \\ \sin\alpha & \cos\alpha & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \tag{3}$$

Auf die gleiche Weise lassen sich auch die Rotationsmatrizen für die x- und y-Achse herleiten, worauf jedoch aus Platzgründen verzichtet wird:

$$T_{R_X} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & \cos\alpha & -\sin\alpha & 0 \\ 0 & \sin\alpha & \cos\alpha & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \tag{4}$$

$$T_{R_Y} = \begin{pmatrix} \cos\alpha & 0 & \sin\alpha & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ -\sin\alpha & 0 & \cos\alpha & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \tag{5}$$

2.2.3 Skalierung

Die Skalierung ist die Streckung oder Stauchung eines Ortsvektors $\vec{v}$, wobei jede Koordinate einzeln gestreckt oder gestaucht wird. Anders als bei der Rotation kann dies jedoch mit nur einer einzelnen Transformationsmatrix erreicht werden.

Der Skalierungsvektor $\vec{s}$ enthält die Skalierungsfaktoren für die drei Koordinaten:

$$\vec{v'} = \begin{pmatrix} x_s \cdot x_v \\ y_s \cdot y_v \\ z_s \cdot z_v \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} x_s & 0 & 0 & 0 \\ 0 & y_s & 0 & 0 \\ 0 & 0 & z_s & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} x_v \\ y_v \\ z_v \\ 1 \end{pmatrix}$$

Die allgemeine Skalierungsmatrix für eine Skalierung mit den Faktoren von $\vec{s}$ lautet also:

$$T_S = \begin{pmatrix} x_s & 0 & 0 & 0 \\ 0 & y_s & 0 & 0 \\ 0 & 0 & z_s & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \tag{6}$$

Dabei wird der Ortsvektor für $x_v, y_v, z_v > 1$ gestreckt und für $x_v, y_v, z_v < 1$ gestaucht.

Außerdem ergeben sich folgende Sonderfälle:

$$\begin{aligned} \vec{s} &= \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix} && \text{Hierbei ergibt sich die Einheitsmatrix,} \\ &&& \text{d. h. der Positionsvektor wird nicht verändert.} \\ \vec{s} &= \begin{pmatrix} -1 \\ -1 \\ -1 \end{pmatrix} && \text{Hierbei wird der Ortsvektor am Ursprung} \\ &&& \text{gespiegelt, also umgekehrt.} \\ \vec{s} &= \begin{pmatrix} x \\ x \\ x \end{pmatrix} && \text{Entspricht einer Skalarmultiplikation des} \\ &&& \text{Vektors mit x (ausgenommen die homogene Koordinate!)} \end{aligned} \tag{7}$$

Wenn - wie im letzten Fall - alle Koordinaten gleich sind, ändert sich nur die Länge des Positionsvektors, die Richtung bleibt gleich (bzw. kehrt sich um bei negativem x). Dadurch ändert ein aus vielen Punkten bestehendes Objekt nur seine Größe, wird aber nicht - wie in allen anderen Fällen - verzerrt.

2.3 Kombination mehrerer Transformationen

Da sich beliebige Transformationen in homogenen Koordinaten alle als Multiplikation mit einer Matrix darstellen lassen, kann man aufgrund der Assoziativität der Matrizenmultiplikation beliebig viele Transformationen zu einer zusammenfassen:

$$\vec{v'} = T_1 \cdot (T_2 \cdot (T3 \cdot (... \cdot \vec{v}))) = \underbrace{(T_1 \cdot T_2 \cdot T_3 \cdot ... \cdot T_n)}_{T} \cdot \vec{v} = T \cdot \vec{v} \tag{8}$$

Da die Matrizenmultiplikation aber nicht kommutativ ist, muss auf die Reihenfolge der Transformationen geachtet werden:

Um z. B. ein Objekt in einem bestimmten Winkel an eine bestimmte Position zu verschieben, muss man das Objekt, solange es sich noch im Ursprung befindet, rotieren und anschließend an die passende Stelle verschieben. Wenn man es zuerst verschiebt und dann rotiert, ändert es bei der Rotation wieder seine Position (da um die Achse und nicht den Objektmittelpunkt rotiert wird) und befindet sich somit nicht an der richtigen Stelle.

Ein weiteres Beispiel für eine Kombination mehrerer Transformationen ist die Halbierung der Größe eines Objekts.

Dazu muss das Objekt zuerst über eine Translation in den Ursprung verschoben werden. Anschließend kann man mit dem Skalierungsvektor $\begin{pmatrix} 0,5 & 0,5 & 0,5 \end{pmatrix}$ das Objekt um die Hälfte stauchen. Schließlich verschiebt man es mit dem umgekehrten Translationsvektor wieder auf seine ursprüngliche Position.

3 Demonstrationsprogramm *MatrixView*

Bei dieser Facharbeit wird zu Demonstartionszwecken das eigens dafür entwickelte Programm *MatrixView* auf CD mitgeliefert. Es besteht aus der Programmdatei *MatrixView.exe* und der Lizenzdatei *licence.txt*. Es muss nicht installiert, sondern kann direkt gestartet werden.

Das Programm selbst und der ebenfalls mitgelieferte Quelltext stehen unter Creative Commons Attribution 3.0 Lizenz und können somit bei Nennung des Autorennamens weitergegeben und auch verändert werden.

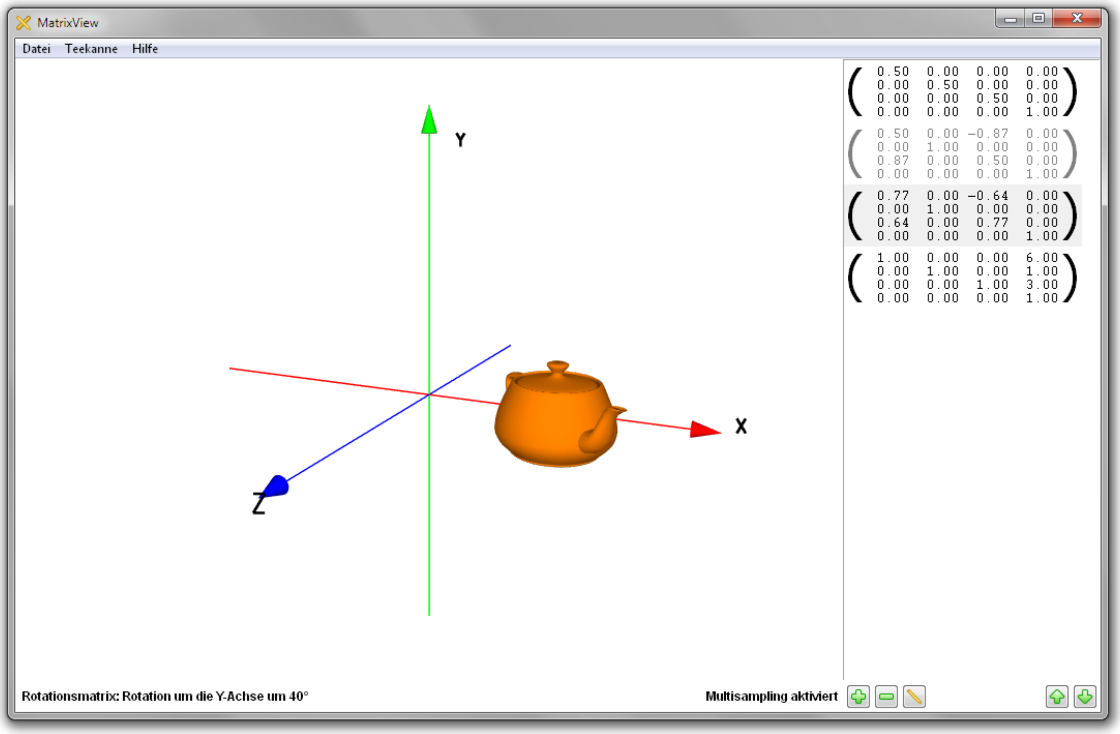


Abbildung 3.1: Screenshot des Demonstrationsprogramms *MatrixView*

Die dreidimensionale Ansicht des Teekannenmodells auf der linken Seite kann komplett über die Maus gesteuert werden. Details dazu im Menü *Hilfe*.

Auf der rechten Seite können über die Buttons am unteren Fensterrand beliebige Transformationsmatrizen hinzugefügt und deren Reihenfolge verändert werden. Die Auswirkungen auf das Teekannenmodell werden sofort sichtbar.

4 Quellenverzeichnis

4.1 Literatur

- Eltermann, Heinz: Grundlagen der praktischen Matrizenrechnung, Mannheim 1969

4.2 Webseiten

Eine Kopie jeder Website findet sich auf der mitgelieferten CD im Ordner *Quellen*.

- http://de.wikipedia.org/wiki/Matrix_(Mathematik)
- http://de.wikipedia.org/wiki/Falksches_Schema
- http://de.wikipedia.org/wiki/Reguläre_Matrix
- http://de.wikipedia.org/wiki/Homogene_Koordinaten
- Thaden, Uwe: Grafiti: 3D-Transformationen, 2001
  http://olli.informatik.uni-oldenburg.de/Grafiti3/grafiti/flow7/page1.html

4.3 Abbildungen

- Seite 6, Abbildung 1.1: Illustration des Falkschen Schemas
  © Klemens Schölhorn, Lakeworks, Bilou, Fangfufu, Mktos532
  http://en.wikipedia.org/wiki/File:Matrix_multiplication_diagram_2.svg
  Lizensiert unter Creative Commons Attribution-ShareAlike 3.0
- Seite 9, Abbildung 2.1: Herleitung der Rotation
  © Klemens Schölhorn, Lizensiert unter Creative Commons Attribution 3.0
- Seite 13, Abbildung 3.1: Screenshot von *MatrixView*

4.4 Lizenz

Selbstständigkeitserklärung

Ich erkläre, dass ich die Facharbeit ohne fremde Hilfe angefertigt und nur die im Quellenverzeichnis angegebenen Quellen und Hilfsmittel verwendet habe.

Memmingen, den 23.12.2010	
Ort, Datum	Unterschrift